

ANALIZA NOŚNOŚCI I STANU DEFORMACJI BELKI ŻELBETOWEJ OBCIĄŻONEJ STATYCZNIE

Piotr Smarzewski, Danuta Barnat-Hunek

Państwowa Szkoła Wyższa im. Papieża Jana Pawła II w Białej Podlaskiej

Wydział Nauk Ekonomicznych i Technicznych

Katedra Nauk Technicznych, ul. Sidorska 95/97, 21-500 Biała Podlaska

e-mail: p.smarzewski@pollub.pl, d.barnat-hunek@pollub.pl

Streszczenie:

Wyniki prezentowane w niniejszej pracy stanowią dopełnienie rezultatów dotyczących analizy stanu naprężenia i mechanizmu zarysowania modelowej zginanej belki żelbetowej, wzmocnionej wiotkimi prętami stalowymi modelowanymi dyskretnie w matrycy betonowej. Celem niniejszego artykułu jest analiza statycznej nośności belki żelbetowej w przyrostowym procesie obciążenia i ilustracja stanu przemieszczenia elementu belkowego. Poprawność założonych modeli betonu i stali zbrojeniowej weryfikowano przez porównanie otrzymanych wyników obliczeń numerycznych z wynikami obliczeń analitycznych.

Słowa kluczowe: metoda elementów skończonych, konstrukcje żelbetowe, belki

Wstęp

Analiza nośności i stanu deformacji elementów konstrukcyjnych jest ważnym zagadnieniem mechaniki konstrukcji, gdyż umożliwia ocenę jej bezpieczeństwa i optymalne projektowanie. Dynamiczny rozwój techniki komputerowej i nowe generacje programów umożliwiają wykonywanie symulacji nieliniowego zachowania żelbetowych układów konstrukcyjnych do chwili zniszczenia z uwzględnieniem zróżnicowanych właściwości materiałowych, rzeczywistego układu zbrojenia i wzajemnej współpracy betonu ze stalą zbrojeniową (Stolarski 1991, 2004, Stolarski, Cichorski 2002, Bobiński, Tejchman 2006, Smarzewski, Stolarski 2007, Stolarczuk, Stolarski 2009, Widuliński i in. 2009, Jankowiak, Łodygowski 2010, Smarzewski 2011, Szcześniak, Stolarski 2012).

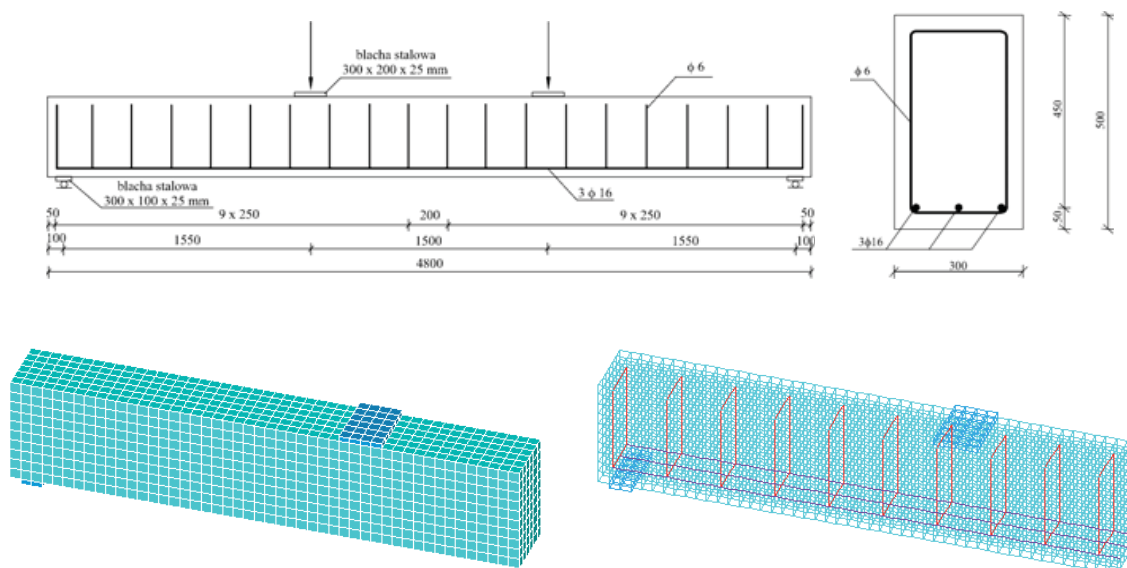
Przedmiotem pracy jest belka żelbetowa traktowana, jako kompozycja betonu i dyskretnie rozłożonych stalowych prętów. Tematem i głównym celem artykułu jest analiza nośności i stanu deformacji belki żelbetowej obciążonej statycznie z uwzględnieniem fizycznych nieliniowości materiałów konstrukcyjnych. Zakres pracy obejmuje wykonanie analizy porównawczej wyników numerycznych i analitycznych. Porównania otrzymanych wyników na poziomie zależności obciążenie-przemieszczenie stanowią podstawę do weryfikacji przyjętych założeń i modeli odkształcenia betonu i stali.

Modelowanie belki żelbetowej

W odniesieniu do betonu zastosowano model sprężysto-plastyczny ze wzmocnieniem. Model ten uwzględnia możliwość kruchego zniszczenia betonu podatnego na zarzysowanie przy rozciąganiu i miażdżenie przy ściskaniu. Zniszczenie przy ściskaniu jest zgodne z modelem Willama-Warnke uwzględniającym pięć parametrów materiałowych (Willam-Warnke 1975). Zniszczenie przy rozciąganiu jest zgodne z kryterium maksymalnego naprężenia normalnego Rankina.

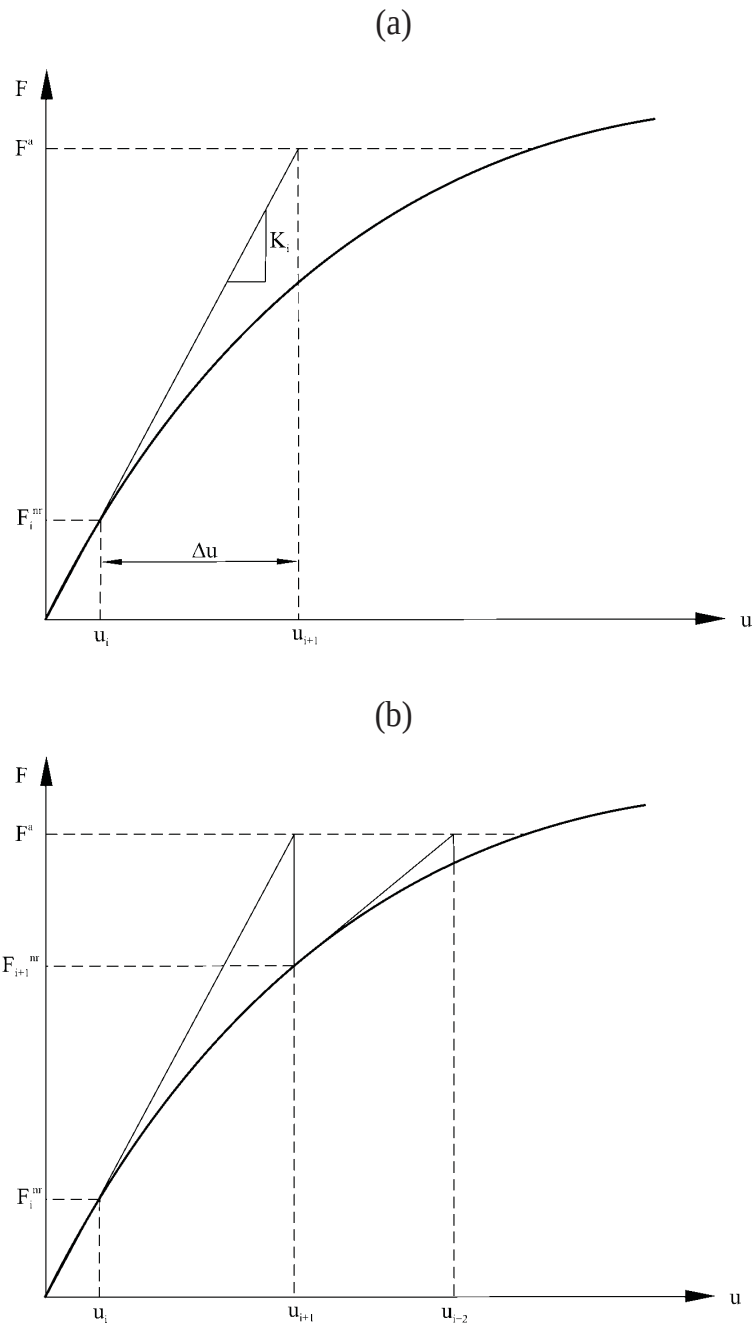
W odniesieniu do stali zbrojeniowej wykorzystano model materiału sprężysto-idealnie plastycznego.

W modelowaniu przestrzennym zastosowano wymiary elementu i właściwości materiałów odpowiadające założonej belce przedstawionej na Rys. 1. Modelowano $\frac{1}{2}$ belki o długości 2400 mm, szerokości 300 mm i wysokości 500 mm w związku z podłużną symetrią elementu.



Rys. 1. Układ zbrojenia, schemat obciążenia i siatka elementów skończonych analizowanej belki

Obliczenia numeryczne wykonano wg pełnej metody iteracyjnego rozwiązywania równań nieliniowych Newtona-Raphsona. Pełną procedurą numeryczną N-R nazywamy proces, podczas którego macierz sztywności jest uaktualniana dla każdej iteracji. Jedną iterację rozwiązania równania przedstawiono na Rys. 2a. W celu uzyskania zbieżnego rozwiązania wymagana jest więcej niż jedna iteracja. Na Rys. 2b przedstawiono rozwiązanie drugiej iteracji ($i+1$). Kolejne iteracje miałyby analogiczny przebieg.



Rys. 2. Rozwiązanie Newtona – Raphsona: (a) pierwsza iteracja, (b) druga iteracja

Rozwiązanie otrzymane na końcu procesu iteracji jest zgodne z poziomem obciążenia $\{F_a\}$. Końcowe zbieżne rozwiązanie jest w równowadze, a więc zwrócony wektor obciążenia $\{F_i^{nr}\}$ obliczony dla aktualnego stanu naprężenia jest zrównoważony przez przyłożony wektor obciążenia $\{F_a\}$ lub zachowuje wymaganą tolerancję.

Analiza wyników numerycznych

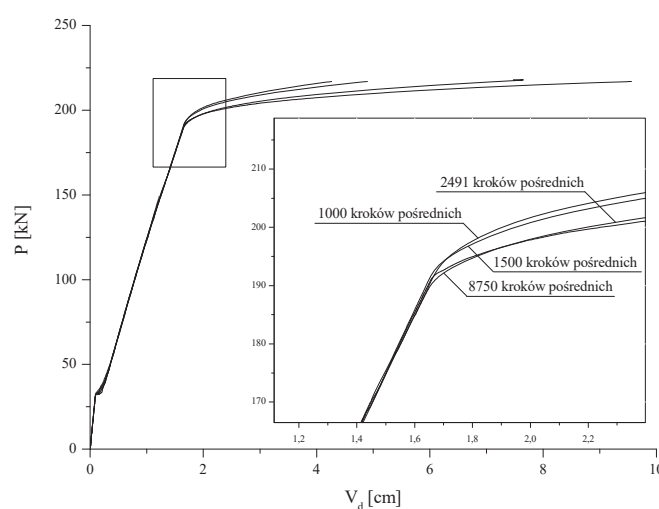
W tabeli 1 zestawiono charakterystyki przeprowadzonych analiz numerycznych celem oceny wrażliwości rozwiązania na dobór ilości pośrednich kroków obciążenia.

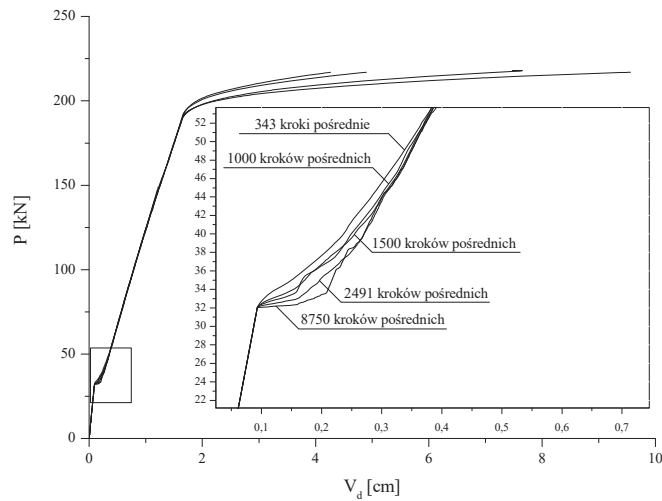
Tab. 1. Zestawienie przeprowadzonych analiz numerycznych

Ilość kroków pośrednich obciążenia	Przyrost obciążenia [kN]	Wartość siły rysującej P_{cr} [kN]
500 (343)*	0.43	32.12
1000	0.22	32.12
1500	0.145	32.12
2500 (2491)*	0.09	32.12
8750	0.025	32.12

* w nawiasach podano krok pośredni, po którym nastąpiła utrata zbieżności rozwiązania

Stany graniczne nośności belki osiągnięto w chwili, gdy nie było zbieżności rozwiązania numerycznego i przy bardzo małych przyrostach obciążenia zarejestrowano nieskończenie duże przyrosty przemieszczeń będące objawem zniszczenia belki. W obliczeniach numerycznych pominięto efekty nieliniowej geometrii. Do obserwacji zmian przemieszczenia przyjęto punkt na dolnej krawędzi w środku belki. Krzywe obciążenie – przemieszczenie pionowe przedstawione na Rys. 3 wyznaczono na podstawie obliczeń numerycznych.





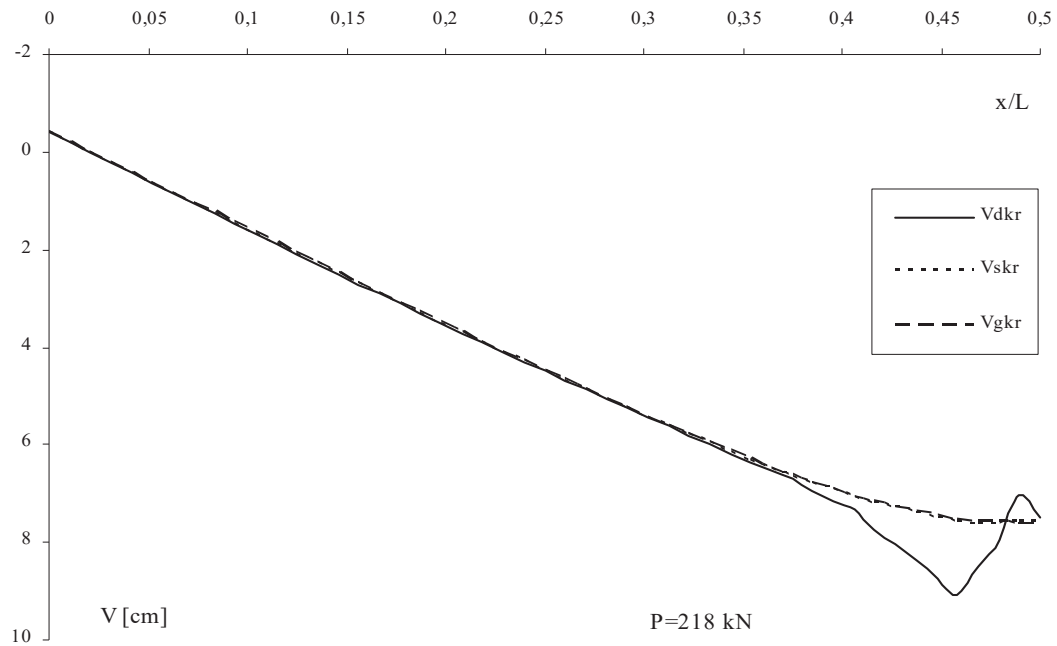
Rys. 3. Porównanie zależności przemieszczenia pionowego w środku belki od obciążenia

Uzyskane przebiegi zmian zależności obciążenie – przemieszczenie pionowe wskazują na wystąpienie w belce żelbetowej lokalnych obszarów zarysowanych, wpływających na skokowe zmniejszanie sztywności elementu przy określonym poziomie obciążenia.

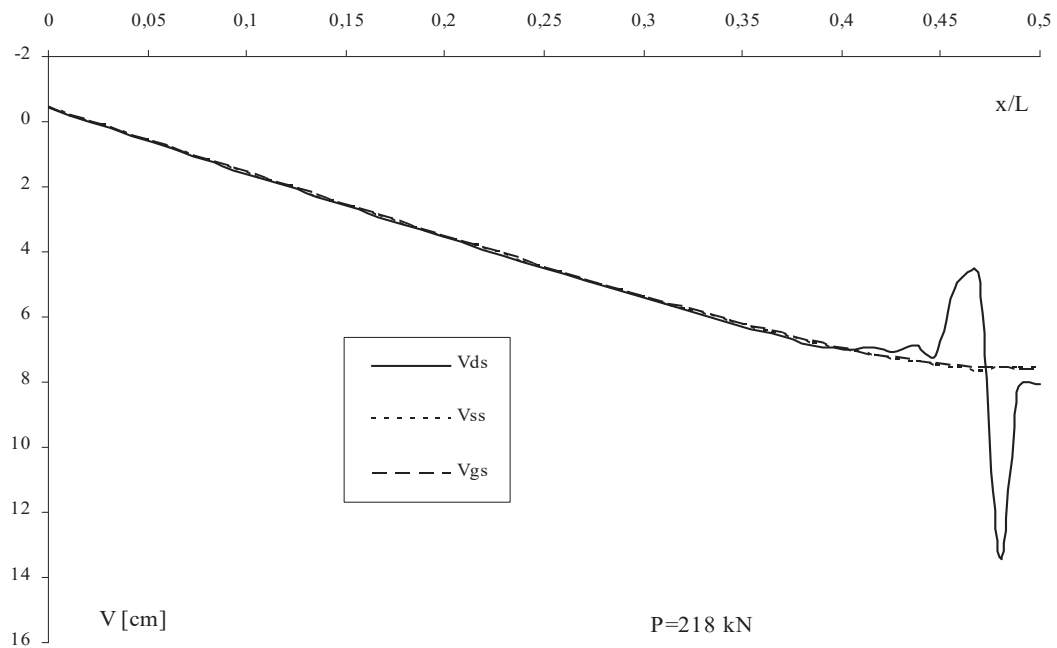
Stan deformacji belki analizowano przy 2491 pośrednich krokach obciążenia i przyroście obciążenia 0.09 kN. W rozwiązaniu zastosowano kryterium zbieżności przemieszczenia równe 0.25. W obszarze liniowo-sprężystym porównano przemieszczenia w modelu i badanej belce przed i w chwili zarysowania. Stwierdzono bardzo dobrą zgodność uzyskanych wyników.

Na Rys. 4 przedstawiono rozkład przemieszczeń pionowych V_{dkr} w skrajnym dolnym włóknie belki, V_{skr} w poziomej osi środkowej w połowie wysokości belki oraz V_{gkr} w skrajnym górnym włóknie belki na krawędzi przekroju poprzecznego przy poziomie statycznej nośności belki, $P = 218$ kN, uzyskanym z rozwiązania numerycznego.

Z kolei na Rys. 5 przedstawiono rozkłady przemieszczeń pionowych V_{ds} w skrajnym dolnym włóknie belki, V_{ss} w poziomej osi środkowej w połowie wysokości belki oraz V_{gs} w skrajnym górnym włóknie belki w środku przekroju poprzecznego przy tym samym poziomie obciążenia.



Rys. 4. Rozkłady przemieszczeń pionowych na krawędzi przekroju poprzecznego belki

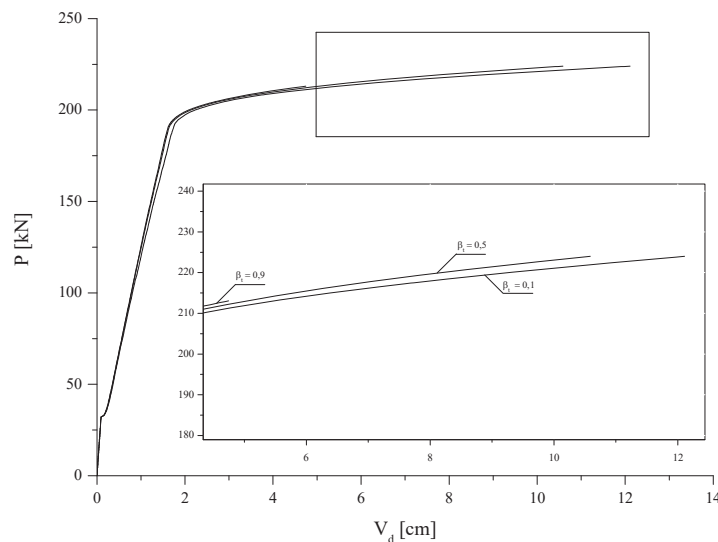


Rys. 5. Rozkłady przemieszczeń pionowych w środku przekroju poprzecznego belki

Zaobserwowano, że górne i środkowe włókna belki zarówno w środku jak i na krawędzi przekroju poprzecznego przemieszczały się prawie równomiernie. Natomiast na charakter przemieszczeń pionowych dolnej krawędzi belki duży wpływ wywarły lokalne zniszczenia matrycy betonowej w strefie działania stałego momentu zginającego.

W zarysowanym betonie uwzględniono możliwość jego wzmocnienia przy ścinaniu przez definiowanie współczynników ścinania przy rysach otwartych β_t i zamkniętych β_c .

W celu określenia wpływu wartości współczynnika nośności na ścinanie przy rysach otwartych β_t na wyniki numeryczne przyjęto jego różne wartości $\beta_t = 0.1, 0.5, 0.9$. W wykonanych analizach założono stałą wartość współczynnika nośności na ścinanie dla rys zamkniętych $\beta_c = 1$. Przedstawione modele były podobne, a zatem zgodnie z oczekiwaniem wyniki na wykresach obciążenie – przemieszczenie pionowe we wczesnych etapach historii obciążenia były bardzo zbliżone we wszystkich przeprowadzonych analizach. Początkowo doświadczenie obrazowała liniowa zależność z małym skokiem, z nagłą utratą sztywności, w chwili zarysowania betonu, pozostająca po zarysowaniu w przybliżeniu krzywą liniową. Zasadniczo modele charakteryzowała liniowa trajektoria o sztywności mniejszej od początkowej, Rys. 6.

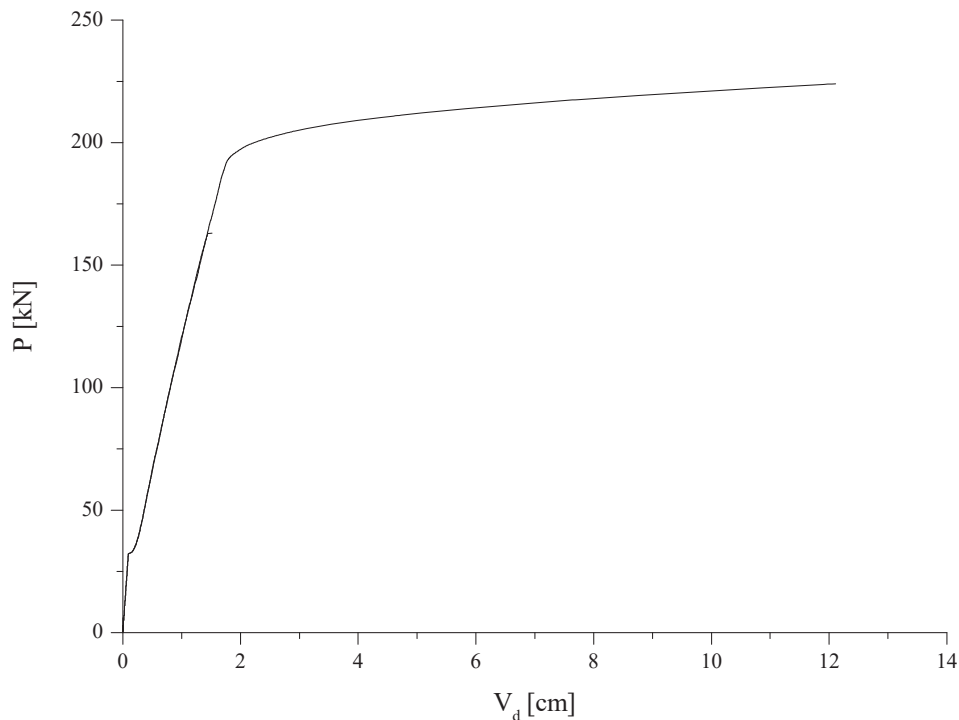


Rys. 6. Porównanie zależności przemieszczenia pionowego w środku belki od obciążenia przy zmiennej wartości β_t

Zaobserwowano, że im mniejsza była wartość współczynnika β_t , tym sztywność belki malała. Gdy założono $\beta_t = 0.1$ i 0.5 nie zaobserwowano utraty zbieżności rozwiązania na całej ścieżce obciążenia do siły maksymalnej $P = 224$ kN. Natomiast, gdy $\beta_t = 0.9$ utrata zbieżności wystąpiła pod obciążeniem $P = 213.1$ kN. Zgodnie z oczekiwaniem, przy tym samym obciążeniu, zarysowanie występowało na większym obszarze i przebiegało szybciej przy niższych wartościach współczynnika β_t .

W celu określenia wpływu wartości współczynnika nośności na ścinanie przy rysach zamkniętych β_c na wyniki numeryczne w przeprowadzonych analizach założono stałą wartość współczynnika nośności na ścinanie dla rys otwartych $\beta_t = 0.1$ i zmienne wartości współczynnika $\beta_c = 0.5$ i 1 . Jak przepuszczano im mniejsza była wartość współczynnika β_c , tym sztywność belki nieznacznie malała (nie dostrzegalne na wy-

kresie, Rys. 7). Przy $\beta_c = 0.5$ utrata nośności belki wystąpiła przy obciążeniu 163 kN, natomiast, gdy założono $\beta_c = 1$ nie zaobserwowano utraty zbieżności rozwiązania na całej ścieżce obciążenia do zadanej siły maksymalnej $P = 224$ kN.



Rys. 7. Porównanie zależności przemieszczenia pionowego w środku belki od obciążenia przy zmiennej wartości β_c

Porównując wpływ wartości współczynnika β_c na zarysowanie belki zaobserwowano, że dla większej wartości współczynnika rysy prostopadłe pojawiały się szybciej i na większym obszarze. Natomiast dla współczynnika równego 0.5 wcześniej zaobserwowano pojawienie się rys ukośnych i bardzo intensywny ich rozwój w strefie przypodporowej, co stało się przyczyną nagłej utraty nośności belki.

Wnioski

W pracy oceniono przydatność metody elementów skończonych w nieliniowej przestrzennej analizie nośności i stanu przemieszczenia belki żelbetowej. Prezentowane wyniki stanowią dopełnienie rezultatów dotyczących analizy stanu naprężenia i mechanizmów zniszczenia, ale odnoszą się do innego aspektów zachowania belki żelbetowej dotyczących nośności i stanu deformacji. Zachowanie modeli elementów skończonych opisywane wykresami siła – przemieszczenie w środku rozpiętości jest zgodne z wynikami typowych badań doświadczalnych. Uzyskane rezultaty świadczą o ogólnej poprawności przyjętych założeń, modeli materiałów, metody rozwiązania i procedur analizy numerycznej.

W nieliniowej analizie żelbetu należy przyjąć wartości współczynników nośności na ścianie. Ustalono, że przy rysach zamkniętych wartość β_c powinna być mniejsza lub równa 1, a przy rysach otwartych β_t powinna być dobrana z przedziału od 0.2 do 0.4, gdyż mniejsze wartości współczynnika powodują problemy ze zbieżnością na niskich poziomach obciążenia.

W obliczeniach numerycznych zastosowano pełną nieliniową procedurę Newtona – Raphsona i obserwowano trudności w uzyskaniu rozwiązania z powodu nieliniowego zachowania betonu zbrojonego. Ustalono, że zastosowanie odpowiednio małego przyrostu obciążenia ułatwia zbieżność i skraca czas obliczeń.

Bibliografia:

1. Bobiński J., Teichman J. (2006), *Modelling of size effects in concrete using elasto-plasticity with non-local softening*. Archives of Civil Engineering, 52, 1, 7-35.
2. Jankowiak T., Łodygowski T. (2010), *Quasi-static failure criteria for concrete*. Archives of Civil Engineering, LVI, 2, 123-154.
3. Smarzewski P. (2011), *Modelowanie statycznego zachowania niesprężystych belek żelbetowych wykonanych z betonu wysokiej wytrzymałości*. Monografia. Politechnika Lubelska. Lublin 2011.
4. Smarzewski P., Stolarski A. (2007), *Modelowanie zachowania niesprężystej belki żelbetowej*. Biuletyn WAT, Vol. LVI, Nr 2, 147-166.
5. Stolarczuk A., Stolarski A. (2009), *Metoda analizy niesprężystych elementów żelbetowych ściskanych mimośrodowo*. Biuletyn WAT, Vol. LVIII, Nr 4, 317-334.
6. Stolarski A. (1991), *Model dynamicznego odkształcenia betonu*. Archiwum Inżynierii Lądowej, T. 37, Z. 3-4, 405-447.
7. Stolarski A. (2004), *Dynamic Strength Criterion for Concrete*. Journal of Engineering Mechanics, American Society of Civil Engineering, Vol. 130, Nr 12, 1428-1435.
8. Stolarski A., Cichorski W. (2002), *Modelowanie statycznego i dynamicznego zachowania niesprężystych tarcz żelbetowych*. Studia z Zakresu Inżynierii, 51, Komitet Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN, Warszawa.
9. Szczęśniak A., Stolarski A. (2012), *Analiza wyężenia belek żelbetowych metodą relaksacji dynamicznej*. Inżynieria i Budownictwo, 5, 267-269.
10. Widuliński Ł., Bobiński J., Teichman J. (2009), *FE-analysis of spacing of localized zones in reinforced concrete bars under tension using elasto-plasticity with non-local softening*. Archives of Civil Engineering, LV, 2, 257-281.
11. Willam K.J., Warnke E.P. (1975), *Constitutive Model for the Triaxial Behavior of Concrete*. Proceedings, International Association for Bridge and Structural Engineering, Vol. 19, ISMES, Bergamo, Italy, s. 174.